Funzioni armoniche

Definizione 1. *Sia Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile. Diremo che $u \in H^1_{loc}(\Omega)$, se per ogni aperto $D \Subset \Omega$, abbiamo che $u \in H^1(D)$.*

Esercizio 2. *Dati un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ed una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$, sono equivalenti:*

(1) $u \in H^1_{loc}(\Omega)$;
(2) $u \in H^1(B_r(X))$ per ogni palla $B_r(X)$ contenuta in Ω.

Definizione 3. *Dati un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ed una funzione $u \in H^1_{loc}(\Omega)$, diremo che la funzione u è armonica in Ω, se per ogni aperto $D \Subset \Omega$ si ha*

$$\int_D |\nabla u|^2\,dx \le \int_D |\nabla v|^2\,dx \quad \text{per ogni} \quad v \in H^1_{loc}(\Omega) \quad \text{tale che} \quad u - v \in H^1_0(D).$$

Esercizio 4. *Dati un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ed una funzione $u \in H^1_{loc}(\Omega)$, mostrare che sono equivalenti:*

(1) u è armonica in Ω;
(2) per ogni funzione $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ si ha

$$\int_{\{\varphi\neq 0\}} |\nabla u|^2\,dx \le \int_{\{\varphi\neq 0\}} |\nabla (u+\varphi)|^2\,dx$$

Proposizione 5. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e $u \in H^1_{loc}(\Omega)$. Allora sono equivalenti:*

(1) u è armonica in Ω;
(2) $\Delta u = 0$ in Ω in senso delle distribuzioni, ovvero

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\,dx = 0 \quad \text{per ogni} \quad \varphi \in C^\infty_c(\Omega).$$

(3) per ogni aperto $D \Subset \Omega$ abbiamo che

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad D$$

come funzionale lineare continuo su $H^1_0(D)$, ovvero

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla v\,dx = 0 \quad \text{per ogni} \quad v \in H^1_0(D).$$

Proposizione 6. *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$. Allora:*

- *Se $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ e $v \in H^1_{loc}(\Omega)$ sono funzioni armoniche in Ω, allora anche la somma $u+v$ è una funzione armonica.*
- *Se $\alpha \in \mathbb{R}$ è una costante ed $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ una funzione armonica in Ω, allora anche αu è una funzione armonica.*

Esercizio 7. *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 su Ω. Allora,*

$$u \text{ è armonica se e solo se } \Delta u = 0.$$

Esempio 8. *Le costanti e le funzioni lineari sono funzioni armoniche. Anche le funzioni*

$$F(x,y) = xy \quad e \quad G(x,y) = x^2 - y^2$$

sono funzioni armoniche in $\mathbb{R}^2$.